Leçon 235 : Problèmes d'interversion de symboles en analyse.

On peut commencer par une introduction qui explique grosso-modo les différentes questions que l'on pose en disant qu'on ne peut pas faire ce que l'on veut dans le cas général.

1 Suites et séries de fonctions (El Amrani)

1.1 Interversion limite-limite

- Définition suite de fonctions + convergence simple/uniforme
- On peut rien dire de $f_n(x_n)$ si on a convergence simple
- Vrai dans le cas de la convergence uniforme
- Théorème pour la dérivée (qui est elle-même une limite)
- Théorème de dérivation dans le cas général

1.2 Existence de limite

- Théorème de Dini
- Application : racine carré en tant que limite de polynômes

1.3 Intégrale de Riemann

- Théorème d'interversion sur un segment
- Amélioration du théorème précédent avec stabilité de l'intégrabilité + exemple avec l'intégrale de $\sin^n$

2 En théorie de l'intégration (Briane-Pagès)

2.1 Théorèmes fondamentaux

- Beppo-Levi
- Corollaire : Lemme de Fatou (application : stabilité de l'intégrabilité pour suite simplement convergente)
- Théorème de convergence dominée + exemple/contre-exemple

2.2 Application aux séries de fonctions

- Interversion série-intégrale
- Borell-Cantelli et/ou continuité de l'intégrale par rapport à la mesure

2.3 Intégrale dépendant d'un paramètre

- Continuité sous le signe intégrale
- Application : la transformée de Fourier qui part de L^1 est continue
- Dérivation sous le signe intégrale
- Application : Dérivée de la transformée de Fourier + gamma est $\mathcal{C}^\infty$

2.4 Interversion intégrale-intégrale

- Fubini puis Tonelli
- Application : intégrale de Gauss
- Dév 1 : Formule des compléments

2.5 En holomorphie

- Formule de Cauchy
- Application : Transformée de Fourier de la gaussienne
- Dév 2 : Injectivité de la transformée de Fourier